Analysis II - Aufgaben

1. Aufgabe:
Sei $d : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to [0, \infty)$ definiert durch

$$d(x,y) = \begin{cases} 0, & x = y \\ \|x\| + \|y\|, & x \neq y \end{cases}$$

gegeben, wobei $\|\cdot\|$ die euklidische Norm in $\mathbb{R}^2$ ist.

a) Zeigen Sie, dass $(\mathbb{R}^2, d)$ ein metrischer Raum ist.

b) Skizzieren Sie die ϵ-Kugeln $B_\epsilon(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid d(x, x_0) < \epsilon\}$ für $x_0 = (0,0)$ und $x_0 = (1,0)$.

c) Beweisen Sie: Konvergiert eine Vektorfolge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bzgl. d gegen $x \in \mathbb{R}^2 \backslash \{0\}$, dann gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ mit

$$x_n = x, \forall\ n \geq N.$$

2. Aufgabe:
Sei (X, d) ein metrischer Raum und $A, B \subseteq X$. Zeigen Sie

$$\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B} \qquad A^\circ \cup B^\circ \subseteq (A \cup B)^\circ$$

Bonus: Geben Sie je ein Beispiel an, bei dem die Inklusion strikt ist.

3. Aufgabe:
Sei $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = y, x \neq 0\}$ und $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x,y) = \begin{cases} e^x - 1, & (x,y) \notin M \\ 0, & (x,y) \in M \end{cases}$$

gegeben. Begründen Sie:

a) f ist genau dann partiell differenzierbar in (x,y), wenn $(x,y) \notin M$.

b) Die Richtungsableitung $\frac{\partial f}{\partial v}(0,0)$ existiert für alle Einheitsvektoren $v \in \mathbb{R}^2$.

c) f ist nicht differenzierbar in $(0,0)$.

4. Aufgabe:
Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, (x,y,z) \mapsto x - 2y + 3z$ und

$$M = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \varphi(x,y,z) = 2x^2 + y^2 + z^2 - 6 = 0\right\}$$

gegeben.

a) Warum nimmt f auf M sein Minimum und Maximum an?

b) Berechnen Sie das Minimum und Maximum von f auf M!

5. Aufgabe:
Seien die Kurve $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^3, \gamma(t) := (\cosh(t), \sinh(t), t)$ und die Vektorfelder $f, g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit

$$f(x,y,z) = (x + z, -y - z, x - y + 1)$$
$$g(x,y,z) = (-y, x, y)$$

gegeben.

a) Welche Länge besitzt die Spur von γ ?

b) Sind f oder g Gradientenfelder ?

c) Berechnen Sie die Kurvenintegrale

$$\int_\gamma f(x,y,z)\ d(x,y,z) \qquad\qquad \int_\gamma g(x,y,z)\ d(x,y,z)$$

Hinweis:

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

6. Aufgabe:
Berechnen Sie die zwei Riemann-Integrale

$$\int_D x e^{xy} d(x,y), \qquad D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x \le 1, -1 \le y \le 0\},$$

$$\text{und} \qquad \int_M x\ d(x,y),$$

wobei $M \subset \mathbb{R}^2$ die Fläche ist, die durch $x^2 + y^2 = 1$ und $y + x = 1$ begrenzt wird.

7. Aufgabe: a) Sei ein *Kegel ohne Spitze*

$$M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = z^2, z > 0\}$$

gegeben. Begründen Sie, dass es sich um eine Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$ handelt. Welche Dimension hat M?

b) Warum ist der *Doppelkegel*

$$M_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = z^2\}$$

keine Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$?

8. Aufgabe:
Berechnen Sie das Integral

$$\int_H \frac{1}{(1+z^2)^2} d(x,y,z)$$

über den Hyperboloiden $H = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 - z^2 \le 1\}$ mit Hilfe der Koordinatentransformation

$$x = r\cos(\varphi), y = r\sin(\varphi), z = t, \qquad \varphi \in [0, 2\pi], r \in [0, \sqrt{1+t^2}], t \in \mathbb{R}.$$

9. Aufgabe: a) Berechnen Sie das Oberflächenintegral

$$\int_S \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + 4z^2}}\ d\sigma$$

über

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = \sqrt{xy}, 1 \le y \le 4, y \le x \le 9\}.$$

b) Sei S die Oberfläche der oberen Einheitskugel im $\mathbb{R}^3$

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \ge 0\}.$$

Verifizieren Sie für $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, (x,y,z) \mapsto (y,z,x)$ den Integralsatz von Stokes.

10. Aufgabe:

Entscheiden Sie, welche der folgenden Aussagen wahr sind.

- ☐ Sei eine Funktionenfamilie $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}, f_n(x) = n \cdot x \cdot e^{-nx^2}, n \in \mathbb{N}$ gegeben. Es gilt

$$\int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx \neq \lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dx$$

  und das zeigt, dass (f_n) nicht gleichmäßig konvergent ist.

- ☐ Jede stetige Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ bildet eine offene Menge $O \subset \mathbb{R}^n$ wieder auf eine offene Menge ab.

- ☐ Die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{2x^2+3y^2}(x^2 - 4y + 1), & (x,y) \neq (0,0) \\ a, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

  ist für kein $a \in \mathbb{R}$ in $(0,0)$ stetig.

- ☐ Der maximale Definitionsbereich $D \subset \mathbb{R}^2$ von

$$f : D \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{\sqrt{2x - x^2}}{y - 1}$$

  ist entweder offen oder abgeschlossen oder beschränkt.

- ☐ Die Funktion $f(x,y) = x^3 - 3x^2y^2 + y^3$ hat in $(0,0)$ ein lokales Extremum.

- ☐ Der Konvergenzradius der folgenden Reihe ist $R = 9$

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{(4 + (-1)^n)^{2n}} x^{2n}$$

- ☐ Das Taylorpolynom zweiten Grades in $x_0 = (0,0,0)$ von

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, f(x,y,z) = \sin(x)\cos(y)e^z$$

  hat die Vorschrift $x + \frac{1}{2}xz$

- ☐ Das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x^3 + y^3 + z^3 &= 1 \\ x \cdot y \cdot z &= -1 \end{aligned}$$

  ist im Punkt $(1,-1,1)$ eindeutig nach (y,z) auflösbar.

- ☐ Für alle Punkte $(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2$ existieren offene Umgebungen $U(x_0,y_0), V(f(x_0,y_0)) \subset \mathbb{R}^2$, sodass eine stetig differenzierbare Umkehrfunktion $f^{-1} : U \to V$ von

$$f(x,y) = \begin{pmatrix} ax\cos(y) \\ bx\sin(y) \end{pmatrix}$$

  mit $a, b > 0$ existiert.