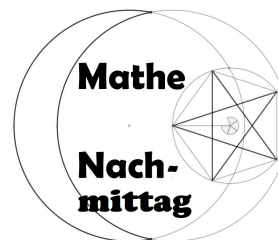
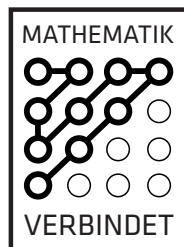


# Analysis II - Aufgaben



## 1. Aufgabe:

Sei  $d : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow [0, \infty)$  definiert durch

$$d(x, y) = \begin{cases} 0, & x = y \\ \|x\| + \|y\|, & x \neq y \end{cases}$$

gegeben, wobei  $\|\cdot\|$  die euklidische Norm in  $\mathbb{R}^2$  ist.

- Zeigen Sie, dass  $(\mathbb{R}^2, d)$  ein metrischer Raum ist.
- Skizzieren Sie die  $\epsilon$ -Kugeln  $B_\epsilon(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid d(x, x_0) < \epsilon\}$  für  $x_0 = (0, 0)$  und  $x_0 = (1, 0)$ .
- Beweisen Sie: Konvergiert eine Vektorfolge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  bzgl.  $d$  gegen  $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ , dann gibt es ein  $N \in \mathbb{N}$  mit

$$x_n = x, \forall n \geq N.$$

## 2. Aufgabe:

Sei  $(X, d)$  ein metrischer Raum und  $A, B \subseteq X$ . Zeigen Sie

$$\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B} \quad A^\circ \cup B^\circ \subseteq (A \cup B)^\circ$$

*Bonus:* Geben Sie je ein Beispiel an, bei dem die Inklusion strikt ist.

## 3. Aufgabe:

Sei  $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = y, x \neq 0\}$  und  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$f(x, y) = \begin{cases} e^x - 1, & (x, y) \notin M \\ 0, & (x, y) \in M \end{cases}$$

gegeben. Begründen Sie:

- $f$  ist genau dann partiell differenzierbar in  $(x, y)$ , wenn  $(x, y) \notin M$ .
- Die Richtungsableitung  $\frac{\partial f}{\partial v}(0, 0)$  existiert für alle Einheitsvektoren  $v \in \mathbb{R}^2$ .
- $f$  ist nicht differenzierbar in  $(0, 0)$ .

## 4. Aufgabe:

Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y, z) \mapsto x - 2y + 3z$  und

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \varphi(x, y, z) = 2x^2 + y^2 + z^2 - 6 = 0\}$$

gegeben.

- Warum nimmt  $f$  auf  $M$  sein Minimum und Maximum an?
- Berechnen Sie das Minimum und Maximum von  $f$  auf  $M$ !

## 5. Aufgabe:

Seien die Kurve  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3, \gamma(t) := (\cosh(t), \sinh(t), t)$  und die Vektorfelder  $f, g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  mit

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= (x + z, -y - z, x - y + 1) \\ g(x, y, z) &= (-y, x, y) \end{aligned}$$

gegeben.

- a) Welche Länge besitzt die Spur von  $\gamma$  ?  
 b) Sind  $f$  oder  $g$  Gradientenfelder ?  
 c) Berechnen Sie die Kurvenintegrale

$$\int_{\gamma} f(x, y, z) d(x, y, z) \quad \int_{\gamma} g(x, y, z) d(x, y, z)$$

*Hinweis:*

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

**6. Aufgabe:**

Berechnen Sie die zwei Riemann-Integrale

$$\int_D x e^{xy} d(x, y), \quad D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 0\},$$

$$\text{und} \quad \int_M x d(x, y),$$

wobei  $M \subset \mathbb{R}^2$  die Fläche ist, die durch  $x^2 + y^2 = 1$  und  $y + x = 1$  begrenzt wird.

**7. Aufgabe:** a) Sei ein *Kegel ohne Spitze*

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = z^2, z > 0\}$$

gegeben. Begründen Sie, dass es sich um eine Untermannigfaltigkeit des  $\mathbb{R}^3$  handelt. Welche Dimension hat  $M$ ?

- b) Warum ist der *Doppelkegel*

$$M_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = z^2\}$$

keine Untermannigfaltigkeit des  $\mathbb{R}^3$ ?

**8. Aufgabe:**

Berechnen Sie das Integral

$$\int_H \frac{1}{(1+z^2)^2} d(x, y, z)$$

über den Hyperboloiden  $H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 - z^2 \leq 1\}$  mit Hilfe der Koordinatentransformation

$$x = r \cos(\varphi), y = r \sin(\varphi), z = t, \quad \varphi \in [0, 2\pi], r \in [0, \sqrt{1+t^2}], t \in \mathbb{R}.$$

**9. Aufgabe:** a) Berechnen Sie das Oberflächenintegral

$$\int_S \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + 4z^2}} d\sigma$$

über

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = \sqrt{xy}, 1 \leq y \leq 4, y \leq x \leq 9\}.$$

- b) Sei  $S$  die Oberfläche der oberen Einheitskugel im  $\mathbb{R}^3$

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geq 0\}.$$

Verifizieren Sie für  $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, (x, y, z) \mapsto (y, z, x)$  den Integralsatz von Stokes.

### 10. Aufgabe :

Entscheiden Sie, welche der folgenden Aussagen wahr sind.

- Sei eine Funktionenfamilie  $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f_n(x) = n \cdot x \cdot e^{-nx^2}$ ,  $n \in \mathbb{N}$  gegeben. Es gilt

$$\int_0^1 \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx \neq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx$$

und das zeigt, dass  $(f_n)$  nicht gleichmäßig konvergent ist.

- Jede stetige Funktion  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  bildet eine offene Menge  $O \subset \mathbb{R}^n$  wieder auf eine offene Menge ab.

- Die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{2x^2+3y^2}(x^2 - 4y + 1), & (x, y) \neq (0, 0) \\ a, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

ist für kein  $a \in \mathbb{R}$  in  $(0, 0)$  stetig.

- Der maximale Definitionsbereich  $D \subset \mathbb{R}^2$  von

$$f : D \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{\sqrt{2x - x^2}}{y - 1}$$

ist entweder offen oder abgeschlossen oder beschränkt.

- Die Funktion  $f(x, y) = x^3 - 3x^2y^2 + y^3$  hat in  $(0, 0)$  ein lokales Extremum.

- Der Konvergenzradius der folgenden Reihe ist  $R = 9$

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{(4 + (-1)^n)^{2n}} x^{2n}$$

- Das Taylorpolynom zweiten Grades in  $x_0 = (0, 0, 0)$  von

$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, f(x, y, z) = \sin(x) \cos(y)e^z$$

hat die Vorschrift  $x + \frac{1}{2}xz$

- Das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x^3 + y^3 + z^3 &= 1 \\ x \cdot y \cdot z &= -1 \end{aligned}$$

ist im Punkt  $(1, -1, 1)$  eindeutig nach  $(y, z)$  auflösbar.

- Für alle Punkte  $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$  existieren offene Umgebungen  $U(x_0, y_0), V(f(x_0, y_0)) \subset \mathbb{R}^2$ , sodass eine stetig differenzierbare Umkehrfunktion  $f^{-1} : U \rightarrow V$  von

$$f(x, y) = \begin{pmatrix} ax \cos(y) \\ bx \sin(y) \end{pmatrix}$$

mit  $a, b > 0$  existiert.